Münster 1937_No 23 Phil DiSS

Mathematik

Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raume zweier komplexer Veränderlichen.

Das Verhalten der Abbildung auf glatten analytischen Randhyperflächen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von

Wolfgang Rothstein

aus Minden i. Westf.

Buch- u. Steindruckerei Max Kramer, Münster i. W., Aegidiistraße 23.

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juni 1935.
Dekan: Herr Prof. Dr. J. Trier.
Referent: Herr Prof. Dr. H. Behnke.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Einleitung.

In der klassischen Funktionentheorie wurde die Ränderzuordnung bei der Abbildung zweier schlichter, beschränkter Gebiete aufeinander genau untersucht. Besitzen beide Gebiete nur erreichbare Randpunkte, so stiftet die Abbildungsfunktion auch auf dem Rande noch eine ein-eindeutige und stetige Zuordnung. Sind beide Gebiete stückweise glatt[1] berandet, (d.h. der Rand lässt sich in endlich viele glatte Kurvenstücke zerlegen), so folgt dann aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip, dass die Abbildung auf dem Rande bis auf endlich viele Ausnahmepunkte noch analytisch ist[2]. Diese Sätze erwiesen sich als sehr wertvoll vor allem in Verbindung mit dem Riemannschen Abbildungssatz. Bekanntlich lässt sich mit ihrer Hilfe z.B. die elliptische Modulfunktion definieren.

Analoge Untersuchungen in der Funktionentheorie von zwei Veränderlichen fehlen bisher. Dort gilt nun weder ein Analogon zum Riemannschen Abbildungssatz - schon Dizylinder und Hyperkugel lassen sich ja nicht aufeinander abbilden - noch eine brauchbare Verallgemeinerung des Spiegelungsprinzips. Eine so weitgehende Verwendung des Spiegelungsprinzips wie in der klassischen Theorie wäre schon deshalb nicht möglich, weil sich glatte Hyperflächen nur dann stückweise auf die Hyperebene abbilden lassen, wenn sie analytisch sind.

---

[1] Eine Mannigfaltigkeit $x_i=\varphi_i(t_1,..t_k)$, $(i=1,2,..n)$ heisst glatt, wenn sich φ_i um jeden Punkt $t_1^o.....t_k^o$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

[2] Vgl. Hurwitz-Courant, Vorl. über allg. Funktionentheorie u. ellipt. Funkt. S.374.

Aber auch die einzig brauchbare Übertragung des Spiegelungsprinzips kann nicht gelten. Sie würde lauten:"Ist die Transformation T: $w' = f(w,z)$; $z' = g(w,z)$ in einer einseitigen Nachbarschaft $\mathfrak{N}(P_o)$ des Punktes P_o der Hyperebene $I(w)=0$ analytisch und dort auf $I(w)=0$ noch stetig , und bildet T das in $\mathfrak{N}(P_o)$ gelegene Stück von $I(w)=0$ auf ein Stück der Hyperebene $I(w')=0$ ab, so ist T über $I(w)=0$ hinaus fortsetzbar (d.h. f und g sind fortsetzbar)." Ein Gegenbeispiel ist eine Transformation T': $w' = f(w)$; $z' = z + g(w)$, wobei $g(w)$ auf $I(w)=0$ noch stetig aber nicht mehr analytisch ist, während $f(w)$ dort analytisch und reellwertig ist.

Diese Andeutungen genügen, um zu zeigen, dass der Wert der Untersuchung des Randverhaltens der Abbildung in der Theorie zweier Veränderlicher auf einem anderen Gebiete liegen muss als in der klassischen Theorie. Das Ziel weist nun gerade das Fehlen eines Analogons zum Riemannschen Abbildungssatz. Bisher wurden Abbildungs- bzw. Nichtabbildbarkeitskriterien im wesentlichen aufgestellt für Bereichklassen, die durch Automorphismengruppen definiert sind. Dagegen fehlen sie für solche Bereiche, die keine Automorphismen zulassen. Dass dieser Fall im Gegensatz zur klassischen Theorie durchaus normal ist, wird sich am Schluss dieser Abhandlung ergeben. In der vorliegenden Arbeit soll nun untersucht werden, welchen Einschränkungen die Bereiche unterworfen sind, die Bilder sind von Bereichen, auf deren Rand ein glattes analytisches Hyperflächenstück liegt. Es ist zu vermuten, dass auch sie ein analytisches Randhyper-

flächenstück aufweisen müssen. Dies wird in vielen Fällen nachgewiesen. Fast unmittelbar ergibt sich, dass ganz allgemein sie zumindest ein analytisches Flächenstück auf dem Rande besitzen müssen. Daraus folgt schon etwa, dass Hyperkugel und Dizylinder nicht aufeinander abgebildet werden können. Im Laufe der Untersuchung ergibt sich eine Reihe von Kriterien für die Nichtabbildbarkeit, vor allem aber ein Prinzip zur Konstruktion starrer Bereiche.

Der erste und zweite Abschnitt bringt die für das folgende notwendigen Hilfssätze.

Im dritten Abschnitt wird für verschiedene Klassen von Bildbereichen die Existenz eines analytischen Randhyperflächenstückes aufgezeigt, wenn der Originalbereich ein solches besitzt.

Die nun gerechtfertigte Sonderuntersuchung der Abbildung von Bereichen aufeinander, die u.a. von analytischen Hyperflächen berandet werden, wird im vierten Abschnitt durchgeführt. Es zeigt sich, dass die Abbildung durch die analytischen Randhyperflächen in erheblichem Umfange festgelegt ist. Die naheliegende Frage nach der Fortsetzbarkeit der Abbildungsfunktionen reduziert sich auf die Frage, ob die "analytische Projektion" stückweise glatt berandetr Bereiche wieder stückweise glatt berandet ist. Der Beweis hierfür ist vorläufig noch kompliziert und wird nur angedeut.

Im fünften Abschnitt werden einfach-zusammenhängende

starre Regularitätsbereiche konstruiert.

Die vorliegende Arbeit wird von Herrn Professor Dr. Behnke und mir zu einem Aufsatz umgearbeitet werden, der in den mathematischen Annalen erscheinen soll.

Zu den hier nicht definierten Begriffen vergleiche: Behnke-Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg.d.Math.u.i.Grenzgeb. Berlin, Springer, 1934.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.	Analytische Flächen auf Hyperflächen.	S. 5
§ 2.	Über das Verhalten der Abbildungsfunktionen am Rande.	17
§ 3.	Die Existenz von Regelflächen auf dem Rande der Bildbereiche.	21
§ 4.	Die Abbildungen von Bereichen aufeinander, die von Regelflächen berandet werden.	30
§ 5.	Automorphismen und starre Bereiche.	43.

§ 1. Analytische Flächen auf Hyperflächen.

Unter $\mathfrak{G}, \mathfrak{L}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}, \mathfrak{N}, \mathfrak{U}, \mathfrak{W}$ verstehen wir im Folgenden immer Bereiche[1] über dem w,z-Raume. Falls nichts anderes vermerkt ist, sollen diese Bereiche stets als offene Punktmengen aufgefasst werden. Ist $\mathfrak{G}$ Teilbereich von $\mathfrak{G}^*$ und liegt jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$ im Innern von $\mathfrak{G}^*$, so nennen wir $\mathfrak{G}^*$ einen Erweiterungsbereich von $\mathfrak{G}$.

Wird ein Bereich $\mathfrak{G}$ nur von endlich vielen Hyperflächenstücken $\mathfrak{H}_i$ berandet, so teilen wir seine Randpunkte in zwei Klassen. P heisst ein innerer Randpunkt (des Hyperflächenstückes $\mathfrak{H}$), wenn P nur auf dem einen Randhyperflächenstück $\mathfrak{H}$ liegt, nicht aber auf den übrigen $\mathfrak{H}_i$. Die anderen Randpunkte von $\mathfrak{G}$ heissen Kantenpunkte.

Ein Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ heisst glatt im Punkte Q, wenn es zu Q eine Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ gibt, sodass alle Punkte von $\mathfrak{H}$, die in $\mathfrak{U}(Q)$ liegen, und dort nur diese einer reellen Gleichung

$$\Psi(u,v,x,y) = 0$$

genügen, wobei Ψ um Q in eine Potenzreihe nach den vier Veränderlichen u,v,x,y entwickelt werden kann. Wir sprechen von einem glatten Hyperflächenstück, wenn es in allen seinen Punkten glatt ist. Lässt sich das glatte Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ in der Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ eines seiner Randpunkte P nicht erweitern, und gibt es eine reell analytische Funktion g(u,v,x,y), sodass in einer Umgebung von P alle Punkte

---

[1] Siehe Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg.d.Math.u.i.Grenzgeb. (1934).

von $\mathfrak{H}$ Lösungen der reellen Gleichung $g = 0$ sind und als weitere Lösungen nur Randpunkte von $\mathfrak{H}$ auftreten, so wollen wir fernerhin P zu den Punkten von $\mathfrak{H}$, nicht aber mehr zu seinen Randpunkten rechnen. (Beispiel: Der Punkt (0,0) der Hyperfläche $x^2-y^2+u^2 = 0$). Das Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ soll fernerhin als glatt in $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden, wenn es in allen seinen in $\mathfrak{L}$ gelegenen Punkten glatt ist.

Q heisst ein gewöhnlicher Punkt eines Hyperflächenstückes $\mathfrak{H}$, wenn es zu Q eine Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ gibt, sodass in $\mathfrak{U}(Q)$ alle Punkte von $\mathfrak{H}$ und nur diese einer reellen Gleichung

$$\psi(u,v,x,y) = 0$$

genügen, wobei ψ in $\mathfrak{U}(Q)$ einmal stetig nach allen Veränderlichen differentiierbar ist und in Q mindestens eine der ersten Ableitungen nicht verschwindet.

Auf einem glatten Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ liegen die gewöhnlichen Punkte überall dicht. Ist nämlich P ein Punkt auf $\mathfrak{H}$, $\psi(u,v,x,y) = 0$ eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{U}(P)$, ferner ψ schon irreduzibel gewählt, so kann $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ mit ψ nur gleichzeitig auf einem Flächenstück verschwinden, das einer Gleichung $\chi(v,x,y) = 0$ und zugleich $\psi = 0$ genügt, wobei neben ψ auch χ in P reell analytisch ist. Da dasselbe in bezug auf die anderen Ableitungen gilt, so liegen auf $\mathfrak{H}$ sogar die Punkte dicht, in denen keine der vier ersten Ableitungen verschwindet, falls nicht χ identisch Null, also ψ von der betreffenden Veränderlichen nicht abhängt.

Wir haben uns im Folgenden häufiger mit auf Hyperflächen liegenden analytischen Flächen zu beschäftigen. Ist Q ein Punkt auf der Hyperfläche $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{f}$ eine analytische Fläche, die in einer Umgebung von Q auf $\mathfrak{H}$ verläuft, so verschwindet (unter der Voraussetzung der zweimaligen stetigen Differentiierbarkeit von $\mathfrak{H}$ in Q) der Levische Differentialausdruck $L(\mathfrak{H})$ in Q.[1)]

Hilfssatz 1:[2)] In einer Umgebung von $Q(w_o, z_o)$ möge auf dem glatten Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ mit der Gleichung $\mathfrak{H}(u,v,x,y) \equiv \varphi(w,z,\bar{w},\bar{z}) = 0$ das analytische Flächenstück $\mathfrak{f}$ liegen. $\mathfrak{f}$ gehe durch Q. Dann genügt $\mathfrak{f}$ in einer genügend kleinen Umgebung von Q der Gleichung

$$\varphi(w,z,\bar{w}_o,\bar{z}_o) = 0$$

Ist nämlich Q ein gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{f}$, so lässt sich $\mathfrak{f}$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ darstellen in der Form $z = h(w)$. Folglich ist

$$\varphi(w,h(w),\bar{w},\bar{h}(\bar{w})) = 0$$

für w aus $\mathfrak{U}$. Nun ist die Funktion

$$\Phi(u,v) = \varphi(w,h(w),\bar{w},\bar{h}(\bar{w}))$$

analytisch im Raume der komplexen Veränderlichen u und v in einer Umgebung von $u+iv=w$ aus $\mathfrak{U}$. Da Φ auf dem in dieser Umgebung gelegenen zweidimensionalen Stück der reellen u,v-Mannigfaltigkeit verschwindet, verschwindet

---

1) Siehe Behnke-Thullen, a.a.O.

2) Siehe auch Elie Cartan, Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. Annali di matem. pura ed appl. IV, 11, (1933).

Φ identisch, d.h. aber $\varphi(w,h(w),\bar{w},\bar{h}(\bar{w})) \equiv 0$ und insbesondere $\varphi(w,h(w),\bar{w}_o,\bar{z}_o) = 0$. f genügt also der Gleichung

(1) $\varphi(w,z,\bar{w}_o,\bar{z}_o) = 0.$

Der Bereich, in dem f durch (1) dargestellt wird, hängt allein von der Regularität der linken Seite ab.

Ist nun $\mathfrak{a}$ kein gewöhnlicher Punkt von f, so können wir ihn jedoch durch solche Punkte Q_n approximieren. Soweit jeweils der Ausdruck auf der linken Seite regulär ist, lässt sich deshalb f darstellen durch

$$\varphi(w,z,\bar{w}_n,\bar{z}_n) = 0.$$

Da $\mathfrak{H}$ in Q glatt vorausgesetzt war, folgt so für f auch in diesem Falle die Darstellung (1).

Folgerung: Durch einen gewöhnlichen Punkt eines glatten Hyperflächenstückes läuft höchstens ein ganz darauf liegendes analytisches Flächenstück.

Ist nämlich etwa in $Q(w_o,z_o)$ die erste Ableitung nach w von $\varphi(w,z,\bar{w},\bar{z})$ ungleich Null, so gilt gleiches für $\varphi(w,z,\bar{w}_o,\bar{z}_o)$.

Wir beweisen nunmehr den später notwendigen

Hilfssatz 2: Auf dem glatten Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ liege ein zweidimensionales Stück γ einer analytischen Fläche f. Dann sind alle nicht auf $\mathfrak{H}$ liegenden Punkte von f mit Punkten von γ nur durch solche auf f liegenden Wege verbindbar, die den Rand von $\mathfrak{H}$ schneiden.

Auf jedem Wege W von f, der Punkte von γ mit nicht auf ψ liegenden Punkten verbindet, gibt es einen Punkt P_o, sodass alle Punkte vor P_o auf W samt einer Umgebung von Punkten auf f zugleich auf ψ liegen, während dies für ein längeres Wegstück nicht mehr zutrifft. Wäre nun der Hilfssatz 2 falsch, so gäbe es mindestens einen Weg W_o und darauf einen Punkt P_o der angegebenen Art, der nicht auf dem Rande von ψ liegt. Also liegt P_o noch auf ψ selbst. In einer Umgebung $\mathfrak{U}(P_o)$ weist nun ψ eine Darstellung $\varphi(u,v,x,y) = 0$ auf, wo φ in den vier Veränderlichen reell analytisch ist. In dieser Umgebung liegen dann aber gewöhnliche Punkte Q von f, die Häufungspunkte sind sowohl von Punkten von f, die mit einer f-Umgebung auf ψ liegen, als auch von Punkten von f, die nicht auf ψ liegen. $z = h(w)$ sei eine Darstellung von f in der Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$ eines solchen Punktes $Q(w_1,z_1)$. Dann gilt also

$$\varphi^*(u,v) = \varphi(u,v,R(h),I(h)) = 0$$

für alle w aus einer Nachbarschaft von w_1. Da $\varphi^*(u,v)$ reell analytisch ist, und damit identisch verschwindet, sobald sie auf einem noch so kleinen Stück der reellen u,v Mannigfaltigkeit Null wird, so ist

$$\varphi^*(u,v) \equiv 0.$$

Daraus folgt aber wiederum, dass $\varphi(u,v,x,y)$ in allen Punkten von f verschwindet, die noch in $\mathfrak{U}(Q)$ liegen. Also hätte Q und damit P_o nicht die verlangte Eigenschaft.

Hilfssatz 3: Liegt das analytische Flächenstück f auf dem in jedem inneren und Randpunkte von f glatten Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$, so besitzt f auf $\mathfrak{H}$ keine wesentlichen Randpunkte.

Zum Beweise müssen wir zeigen, dass es zu jedem auf $\mathfrak{H}$ liegenden Randpunkte P_o von f eine in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P_o)$ reguläre und nicht identisch verschwindende Funktion $g(w,z)$ gibt, sodass alle in $\mathfrak{U}$ liegenden Punkte von f der Gleichung $g = 0$ genügen.

In $\mathfrak{U}(P_o)$ lässt sich $\mathfrak{H}$ wieder darstellen durch

$$\psi(u,v,x,y) \equiv \varphi(w,z,\bar{w},\bar{z}) = 0,$$

wo φ als Funktion der vier komplexen Veränderlichen regulär ist in einer achtdimensionalen Umgebung $\mathfrak{V}$ des vierdimensionalen $\mathfrak{U}(P_o)$. Ferner ist P_o Konvergenzpunkt einer Folge $P_n(w_n,z_n)$, die (samt einer zweidimensionalen Umgebung auf f) zugleich auf $\mathfrak{H}$ und f liegen. Also genügt f jeweils den Gleichungen

$$(2) \quad \varphi(w,z,\bar{w}_n,\bar{z}_n) = 0,$$

soweit die linke Seite regulär ist. Wegen der Regularität von $\varphi(w,z,\bar{w},\bar{z})$ in $\mathfrak{V}$ gehört für $n>n_o$ der Punkt P_o zum Regularitätsbereich der $\varphi(w,z,\bar{w}_n,\bar{z}_n)$. Es ist nur noch zu zeigen, dass die Ausdrücke links nicht identisch verschwinden. Ist P_o ein gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{H}$, so ist mindestens eine der Ableitungen von $\varphi(w,z,\bar{w}_n,\bar{z}_n)$

---

[1] Siehe Behnke-Thullen, a.a.O. S. 25

in P_n für $n > n_o$ ungleich Null. Damit besitzen wir dann die gesuchte Funktion $g(w,z)$.

Ist P_o kein gewöhnlicher Punkt von ψ, so vermögen wir noch gleichfalls eine der Funktionen $\varphi(w,z,\bar{w}_n,\bar{z}_n)$ als $g(w,z)$ zu wählen, solange sich unter den P_n mit genügend grossem Index noch ein gewöhnlicher Punkt von ψ befindet. Trifft dies aber nicht zu und lässt sich P_n auch nicht zu diesem Zwecke durch einen anderen Punkt seiner f-Umgebung auf ψ ersetzen, so heisst dies: In $U(P_o)$ liegt f zugleich auf den Hyperflächen $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \cdots \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0$. Statt ψ wählen wir nun $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$ oder $\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0$, ... P_o liegt wiederum auf diesen Hyperflächen. Dieser Prozess der Ersetzung einer Gleichung $\psi = 0$ muss schliesslich zum Ziele führen, weil sonst in P_o alle Ableitungen von ψ verschwänden.

Da analytische Funktionen in dieser Arbeit inbezug auf komplexe wie auf reelle Veränderliche vorkommen, so wollen wir, um Missverständnisse auszuschliessen, das Wort analytisch, wo es möglich ist, durch andere Bezeichnungen ersetzen. Statt analytische Hyperflächen benutzen wir im folgenden die Bezeichnung Regelfläche. Eine Regelfläche ist also eine Hyperfläche, bei der jeder ihrer Punkte auf einem ganz auf der Hyperfläche gelegenen analytischen Flächenstück liegt.[1] Hyperflächen mit lauter gewöhnlichen Punkten

[1] Die in der a.a.O. zitierten Arbeit von Elie Cartan vorkommenden Hyperplanoide sind immer glatte Regelflächen und seine "hypersurfaces analytiques" sind stets glatte Hyperflächen, nicht aber immer Regelflächen.

wollen wir gewöhnliche Hyperflächen nennen.

Hilfssatz 4: Auf dem in jedem seiner Punkte glatten und gewöhnlichen Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ mögen unendlich viele analytische Flächenstücke $\mathfrak{F}_n$, $n = 1,2,\ldots$ liegen. In jeder noch so kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes P_o von $\mathfrak{H}$ mögen unendlich viele der $\mathfrak{F}_n$ auftreten und dort nicht ineinander fortsetzbar sein. Dann ist $\mathfrak{H}$ eine Regelfläche.

Zu P_o gibt es dort eine irreduzible reell-analytische Funktion $\psi(x,y,u,v)$, sodass $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{U}$ dargestellt wird durch

$$\psi(x,y,u,v) \equiv \varphi(w,z,\bar{w},\bar{z},) = 0.$$

In P_o verschwindet nicht alle ersten partiellen Ableitungen von ψ. Es sei etwa $\frac{\partial\psi}{\partial x} \neq 0$ in P_o. $\mathfrak{U}(P_o)$ sei nun so klein gewählt, dass dort $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ nirgends verschwindet und $\varphi(w,z,\bar{w},\bar{z},)$ für alle Paare (w,z) und $(\bar{w},\bar{z},)$ regulär ist. $\psi = 0$ möge aufgelöst ergeben

$$x = \psi^*(y,u,v).$$

In Bezug auf ψ bilden wir nunmehr den Levischen Differentialausdruck $\chi(x,y,u,v) = L(\psi)$.

χ ist gleichfalls in $\mathfrak{U}(P_o)$ überall analytisch. Auf $\mathfrak{H}$ ist $L(\psi)$ als eine analytische Funktion der drei Veränderlichen auszudrücken:

$$X(y,u,v) = \chi(\psi^*(y,u,v)y,u,v) = L(\psi).$$

In allen Punkten von $\mathfrak{H}$, durch die auf $\mathfrak{H}$ liegende analytische Flächenstücke gehen, muss $L(\psi)$ verschwinden.[1)]

[1)] Siehe Bohnke-Thullen, a.a.O. Satz 5.

Ist $\chi(x,y,u,v)$ oder auch nur $X(y,u,v)$ identisch Null, so ist $\mathfrak{y}$ eine Regelfläche.[1] Ist $X(y,u,v)$ aber nicht identisch Null, so gilt in $\mathfrak{U}$:

$$X(y,u,v) = X_1(y,u,v) \cdot X_2(y,u,v) \cdot \ldots \cdot X_t(y,u,v).$$ [2]

Die X_p sind irreduzible Pseudopolynome nach $(y-y_0)$ mit der Spitze in u_0, v_0.[3] Die in den Pseudopolynomen auftretenden Koeffizienten sind analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen u und v in einer Umgebung von u_0, v_0, sie brauchen jedoch keine reellen Funktionen der reellen Veränderlichen u und v zu sein. Auf dem analytischen Flächenstück $\mathfrak{r}_n$ verschwindet mindestens einer der Faktoren X_p. In Bezug auf diese X_p behaupten wir nun: Die reellen Lösungen der Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \psi^*(y,u,v) \\ 0 &= X(y,u,v) \end{aligned}$$

in $\mathfrak{U}$ liegen alle auf einem analytischen Flächenstück $\mathfrak{r}_n^*$, welches aus $\mathfrak{r}_n$ durch analytische Fortsetzung in $\mathfrak{U}$ entsteht. Wir wissen, dass $\mathfrak{r}_n$ einer Gleichung

$$(4) \qquad \varphi(w,z,\bar{w}_n,\bar{z}_n) = 0$$

genügt, wobei $P_n(w_n,z_n)$ irgend ein Punkt auf $\mathfrak{r}_n$ ist.

---

[1] Siehe Behnke-Thullen, a.a.O. Satz 5.

[2] W.F.Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II_1 (1929) S.104.

[3] desgl. S. 95.

Die linke Seite von (4) ist eine analytische Funktion mit nirgends verschwindender erster Ableitung nach z in $\mathfrak{U}$, die, während (w_n, z_n) gegen (w_o, z_o) konvergiert, gegen die reguläre nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi(w, z, \bar{w}_o, \bar{z}_o)$ geht. Daraus folgt, dass bei genügend klein gewähltem $\mathfrak{U}$ die Gleichung (4) in $\mathfrak{U}$ irreduzibel ist und ein zusammenhängendes analytisches Flächenstück γ_n^* darstellt. Auf γ_n liegen nun überall dicht die Punkte, in denen $\frac{\partial X_p}{\partial y}$ nicht verschwindet, weil die Resultante von X_p und $\frac{\partial X_p}{\partial y}$ eine nicht identisch verschwindende analytische Funktion A(u,v) ist. P_μ sei ein solcher Punkt. Wir können X_p in einer Umgebung von P_μ auflösen und erhalten:

$$y = \phi_\mu(u,v).$$

$$\Psi(u,v) = \varphi(w, \psi^*(y,u,v) + i\phi_\mu(u,v), \bar{w}_\mu, \bar{z}_\mu)$$

ist eine in der Nähe von P_μ auf γ_n überall verschwindende und in u,v analytische Funktion. $\Psi(u,v)$ verschwindet also auch für komplexe u, v. Die gewöhnlichen Punkte von $X_p = 0$ im Raume der drei komplexen Veränderlichen y,u,v sind, soweit sie in einer kleinen Umgebung des Punktes (y_o, u_o, v_o) liegen, miteinander zusammenhängend. So folgt, dass dort überall $\Psi(u,v)$ verschwindet. Also genügen insbesondere alle reellen Lösungen von (3) aus $\mathfrak{U}$ der Gleichung (4) und liegen auf dem analytischen Flächenstück γ_n^*. Da die Anzahl der Pseudopolynome X_p aber nur endlich ist, liegen die Lösungen von

$$x = \psi^*(y,u,v)$$
$$L(\psi) = 0$$

in $\mathfrak{U}$ auf nur endlich vielen analytischen Flächenstücken. Wir kommen zu einem Widerspruch. Daher ist $X(y,u,v) \equiv 0$, d.h. $\mathfrak{y}$ ist eine Regelfläche.

Aus dem soeben bewiesenen Satz schliessen wir sogleich weiter

Hilfssatz 5: Die Gesamtheit der Punkte, die bei Fortsetzung eines analytischen Flächenstückes $\mathfrak{r}$, das auf der endlichen, glatten und gewöhnlichen Hyperfläche $\mathfrak{y}$ liegt, die keine Regelfläche ist, erreicht werden, bilden wieder ein analytisches Flächenstück.

Würde nämlich diese Gesamtheit von Punkten kein analytisches Flächenstück bilden, so müssten sich wenigstens in einem Punkte P_o von $\mathfrak{y}$ unendlich viele Flächenstücke häufen, die in einer genügend kleinen Umgebung von P_o nicht mehr in einander fortsetzbar sind. Das widerspricht auf Grund von Hilfssatz 4 der Voraussetzung über P_o.

Dass die Voraussetzung, $\mathfrak{y}$ sei keine Regelfläche, notwendig ist, ersehen wir am Beispiele der überall glatten Fläche $|w.z^{\sqrt{2}}| = 1$. Das analytische Flächenstück $w.z^{\sqrt{2}} = 1$ mit (w,z) aus einer Umgebung von $(1,1)$ ergibt bei analytischer Fortsetzung schliesslich ein Gebilde, dass nicht mehr ein analytisches Flächenstück ist.[1)]

[1)] Siehe Behnke-Thullen, a.a.O. S. 27.

Hilfssatz 6: $\mathfrak{H}$ sei ein glattes gewöhnliches Hyperflächenstück im einfach zusammenhängenden[1] Zylinderbereich $\mathfrak{z}$. Auch sei $\mathfrak{H}$ keine Regelfläche. Jedes in $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{H}$ liegende analytische Flächenstück γ genügt dann einer Gleichung $f(w,z) = 0$, wo $f(w,z)$ in ganz $\mathfrak{z}$ regulär ist und dort nur auf den aus γ durch Fortsetzung zu erreichenden (und damit notwendig auf $\mathfrak{H}$ liegenden) analytischen Flächenstücken verschwindet.

In der Tat! γ^* sei das analytische Flächenstück, das wir durch alle möglichen Fortsetzungen von γ in $\mathfrak{z}$ erhalten. Auf Grund von Hilfssatz 2 liegt es ganz auf $\mathfrak{H}$, und wegen Hilfssatz 5 und Hilfssatz 3 weist es in $\mathfrak{z}$ keine wesentlichen Randpunkte auf. Zu den Punkten und Randpunkten P von γ^* gibt es also eine jeweils in einer Umgebung reguläre Funktion $g_p(w,z)$, sodass $g_p = 0$ dort die Punkte und Randpunkte von γ^* darstellt. Nunmehr können wir in $\mathfrak{z}$ den zweiten Satz von Cousin heranziehen.[2] Zu den Punkten und Randpunkten von γ^* wählen wir die zugehörige Funktion $g_p(w,z)$. (Die g_p sind offenbar miteinander verträglich). In den übrigen Punkten von $\mathfrak{z}$ wählen wir die Funktion identisch 1. So erlangen wir nach Cousin die für den Hilfssatz 6 verlangte Funktion.

---

1) $\mathfrak{z}$ soll einfach zusammenhängend sein, wenn $\mathfrak{z}$ topologisch vom Typus der Hyperkugel ist.

2) Siehe Behnke-Thullen, a.a.O. Satz 33.

§ 2. Über das Verhalten der Abbildungsfunktionen am Rande.

Satz 1. Der Bereich $\mathfrak{G}$ werde durch die analytische Transformation

$T(\mathfrak{G},\mathfrak{G}')$: $w' = f(w,z)$; $z' = g(w,z)$

auf den beschränkten Bereich $\mathfrak{G}'$ abgebildet. $P_\nu(w_\nu, z_\nu)$ sei eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{G}$, sodass die Kreisscheiben $\mathfrak{K}_\nu$: $w = w_\nu$, $|z-z_\nu| < \varrho$, $\varrho > 0$ noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegen. Dann kann man immer eine Teilfolge P_{ν_k} der P_ν herausgreifen, sodass die Bilder der $\mathfrak{K}_{\nu_k}$, d.h. die analytischen Flächenstücke

$w' = f(w_{\nu_k}, z_{\nu_k} + \varrho u) = f_{\nu_k}(u)$

$z' = g(w_{\nu_k}, z_{\nu_k} + \varrho u) = g_{\nu_k}(u)$, $|u| < 1$

gleichmässig für $|u| < 1$ konvergieren. [1] Dabei tritt dann einer der beiden folgenden Fälle ein:

(A) Das Grenzgebilde ist ein analytisches Flächenstück: $w' = F(u)$, $z' = G(u)$, $|u| < 1$ und $F'(0)$, $G'(0) \neq 0,0$. In $|u| < 1$ bestehen gleichmässig die Beziehungen:

$\lim f_{\nu_k}(u) = F(u)$, $\lim g_{\nu_k}(u) = G(u)$;

$f'_{\nu_k}(u) = f'_z(w_{\nu_k}, z_{\nu_k} + \varrho u)\cdot\varrho \to F'(u)$

$g'_{\nu_k}(u) = g'_z(w_{\nu_k}, z_{\nu_k} + \varrho u)\cdot\varrho \to G'(u)$.

(B) Es bestehen die Beziehungen:

$f'_z(P_{\nu_k}) \to 0$, $g'_z(P_{\nu_k}) \to 0$.

Zum Beweise ist lediglich zu beachten, dass die Funkti-

---

[1] Gleichmässige Konvergenz in einem offenen Gebiet soll hier bedeuten: Gleichmässige Konvergenz in jedem abgeschlossenen, ganz im Innern liegenden Teilgebiet.

onen $f_\nu(u)$ und $g_\nu(u)$ für $|u| < 1$ eine normale Familie bilden.

Die Bedeutung des Satzes liegt in seiner Anwendbarkeit auf Kreisscheiben, die gegen den Rand von $\mathfrak{L}$ konvergieren. Im Falle (A) folgt dann, dass auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ ein analytisches Flächenstück liegt. Der Fall (B) kann natürlich nur eintreten, wenn die $\mathfrak{K}_\nu$ gegen den Rand von $\mathfrak{L}$ konvergieren oder die Transformation T nicht eineindeutig ist. Dass der Fall dann aber auch vorkommt, ersieht man an folgendem Beispiel:

Der Bereich $\mathfrak{L}$: $|w| < 1$, $|z| < 1$, $z \neq 0$

wird durch die Transformation

$$w' = w \cdot z, \quad z' = z$$

ein-eindeutig und analytisch auf den Bereich

$$|w'| < |z'|, \quad |z'| < 1$$

abgebildet. Die Bilder der in $\mathfrak{L}$ liegenden Kreise $z = \varepsilon_\nu$ und $|w| < 1$ mit $\lim \varepsilon_\nu = 0$ konvergieren gegen den Punkt (0,0).

Zusatz: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 sind die Folgen $f'_z(P_\nu)$ und $g'_z(P_\nu)$ beschränkt.

In der Tat sind die Folgen

$f_\nu(u) = f(w_\nu, z_\nu + \varrho u)$, $g_\nu(u) = g(w_\nu, z_\nu + \varrho u)$

für $|u| < 1$ regulär und gleichmässig beschränkt. Eine Schranke sei M. Also gilt auf Grund des Schwarzschen Lemmas:

$$|f'_\nu(0)| < M, \quad |g'_\nu(0)| < M$$

$$|f'_z(P_\nu)| < \frac{M}{\varrho}, \quad |g'_z(P_\nu)| < \frac{M}{\varrho}.$$

Der Fall (B) Des vorstehenden Satzes kann wie der Fall (A) zur Bestimmung von Eigenschaften des Bildbereiches nutzbar gemacht werden, wenn wir noch den folgenden Hilfssatz heranziehen.

Hilfssatz 7:[1] Die Funktion $f_o(w,z)$ sei im Bereiche $\mathfrak{G}_o$ regulär und es sei $|f(\mathfrak{G}_o)| < M$. Zum Punkte P aus $\mathfrak{G}_o$ möge es im Erweiterungsbereich $\mathfrak{G}_o^*$ eine Hyperkugel $\mathfrak{K}$ mit folgenden Eigenschaften geben: 1. $\mathfrak{K}$ weist Punkte ausserhalb $\mathfrak{G}_o$ auf. 2. Für jede Punktfolge P_μ aus $\mathfrak{G}_o$, die gegen einen in $\mathfrak{K}$ liegenden Randpunkt von $\mathfrak{G}_o$ konvergiert, gilt $\overline{\lim_{\mu\to\infty}}|f(P_\mu)| \leq m$. Dann ist $|f(P)| \leq m^{\frac{1}{n+1}} \cdot M^{\frac{n}{n+1}}$.

Liegt $\mathfrak{G}_o$ in $\mathfrak{K}$, so ist n gleich Null zu setzen. Im anderen Falle gibt es sicher noch einen Punkt Q auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ und zu ihm ein $\mathfrak{U}(Q)$, das ganz ausserhalb von $\mathfrak{G}$ liegt, und dazu eine natürliche Zahl n, sodass durch n Drehungen von $\mathfrak{K}$ um P der ganze Rand von $\mathfrak{K}$ mit Bildpunkten von $\mathfrak{U}(Q)$ überdeckt wird. Ein solches n ist in der obigen Formel zu wählen.

Die n analytischen Drehungen T_ν transformieren $\mathfrak{G}_o$ in die Bereiche $\mathfrak{G}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots n)$. Der zusammenhängende P im Innern enthaltende Durchschnitt der $\mathfrak{G}_i$ $(i = 0,1,2,..n)$ sei $\mathfrak{D}$. Offenbar gilt $\mathfrak{D} \ll \mathfrak{K}$ Bei der Drehung T_ν geht $f_o(w,z)$ über in $f_\nu = f_o(T_\nu^{-1})$. f_ν ist in $\mathfrak{G}_\nu$ regulär und $|f_\nu(\mathfrak{G}_\nu)| < M$.

---

[1] Siehe auch C. Caratheodory, Conformal Representation, Cambridge Tracts 28 (1932) S. 81,82.

Alle Randpunkte von $\mathfrak{v}$ sind Bilder in $\mathfrak{L}$ liegender Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$. Konvergieren die Punkte P_μ aus $\mathfrak{v}$ gegen einen Randpunkt von $\mathfrak{v}$, so gilt daher für wenigstens eines der f_ν : $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} |f_\nu(P_\mu)| \leq m$.

Für die in $\mathfrak{v}$ reguläre Funktion :

$$F(w,z) = \prod_{i=0}^{n} f_i(w,z)$$

folgt:

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} |F(P_\mu)| \leq m\, M^m$$

für jede Folge P_μ aus $\mathfrak{v}$, die gegen einen Randpunkt konvergiert. Nach dem Satz vom Maximum ist daher:

$$|F(P)| \leq m \cdot M^n.$$

Also $|f_0(P)|^{n+1} \leq m \cdot M^n$ w.z.b.w.

Wir benötigen von diesem Hilfssatz eine spezielle Folgerung.

Hilfssatz 8: Die Funktion $f(w,z)$ sei regulär und beschränkt in einer einseitigen Nachbarschaft $\mathfrak{N}$ eines Hyperflächenstückes $\mathfrak{H}$, das lauter gewöhnliche Punkte besitzt. Für P_ν aus $\mathfrak{N}$ und $\lim P_\nu = P$ auf $\mathfrak{H}$ sei, wie auch die P_ν und P gewählt werden, immer $\lim f(P_\nu) = a$. Dann ist $f(w,z) \equiv a$.

Zum Beweise betrachten wir die Funktion $g(w,z) = f(w,z) - a$. Eine Schranke für $g(w,z)$ in $\mathfrak{N}$ sei M. Zu Q aus $\mathfrak{N}$ in genügender Nähe von $\mathfrak{H}$ gibt es dann eine Hyperkugel $\mathfrak{L}$, die durch $\mathfrak{H}$ so in zwei Teile zerlegt wird, dass die Punkte des einen Teiles alle zu $\mathfrak{N}$ gehören. Also ist der obige Satz anwendbar. So folgt

$g(Q) = 0$. Gleiches gilt für alle Punkte, die genügend dicht bei Q liegen. Also ist $g(w,z) \equiv 0$.

§ 3. Die Existenz von Regelflächen auf dem Rande der Bildbereiche.

In diesem Abschnitt sollen die Bilder der Bereiche untersucht werden, zu deren Berandung Regelflächen gehören. Um dazu den Satz 1 heranziehen zu können, beschränken wir uns zunächst auf ausgez. Bereiche. $\mathfrak{L}$ heisst ein ausgez. Bereich, wenn zu seinem Rande ein Regelflächenstück

$\mathfrak{k}$: $\quad w = \gamma(t), \quad |z-z_0| < \delta, \quad \gamma'(t) \neq 0, \quad A \leq t \leq B$

gehört und eine einseitige Nachbarschaft von $\mathfrak{k}$ noch in $\mathfrak{L}$ liegt, während sich überall gegen $\mathfrak{k}$ äussere Punkte häufen.

In diesem Falle gibt es zu jedem Punkte (w_r, z_r) von $\mathfrak{k}$ eine Folge von Punkten (w_ν, z_r), sodass

1. $\lim (w_\nu, z_r) = (w_r, z_r)$,
2. ein $\delta_1 > 0$ existiert, sodass die Kreisscheiben $\mathfrak{K}_\nu$: $w = w_\nu, \quad |z-z_r| < \delta_1$ noch in $\mathfrak{L}$ liegen.

Die Voraussetzungen über den ausg. Bereich sind z. B. immer erfüllt, wenn $\mathfrak{L}$ nur von endlich vielen glatten Hyferflächenstücken berandet wird und zu diesen eine Regelfläche $w = \gamma(t)$ gehört.

Aus satz 1 und Hilfssatz 8 folgt nun

Satz 2: Ist der beschränkte Bereich $\mathfrak{L}'$ ein Bild des ausgez. Bereiches $\mathfrak{L}$, so liegt auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ ein analytisches Flächenstück.

Diese Aussage folgt unmittelbar aus Satz 1, falls nicht für alle Folgen (w_ν, z_r) mit $\lim (w_\nu, z_r) = (w_r z_r)$ auf $\mathfrak{R}$ der Fall (B) des Satzes 1 eintritt. Sind $f(w,z)$ und $g(w,z)$ wieder die Abbildungsfunktionen, so gilt also im letzteren Falle:

$\lim f'_z(w_\nu, z_r) = 0, \quad \lim g'_z(w_\nu, z_r) = 0$

für alle Folgen (w_ν, z_r) mit $\lim (w_\nu, z_r) = (w_r, z_r)$ auf $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ ist ein Hyperflächenstück mit lauter gewöhnlichen Punkten. Es ergibt sich demnach aus Hilfssatz 8

$f'_z(w,z) \equiv 0, \quad g'_z \equiv 0.$

Bei der Abbildung $w' = f(w,z), \quad z' = g(w,z)$ liegt folglich die Menge der Bildpunkte von $\mathfrak{G}$ auf einer analytischen Fläche und bildet keinen Bereich $\mathfrak{G}'$ mehr, entgegen der Vorausetzung. Es tritt also mindestens einmal für die Folgen der Fall (A) des Satzes 1 ein.

Es ist nun leicht, die Voraussetzungen über den ausgez. Bereich fallen zu lassen. In den folgenden Sätzen tritt wiederholt die Voraussetzung auf, dass ein Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ (insbesondere eine Regelfläche) einen Bereich $\mathfrak{G}$ berandet. Das soll genauer heissen: 1. Die Punkte von $\mathfrak{H}$ gehören zum Rande von $\mathfrak{G}$. 2. Jeder Teil $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{H}$, dessen Begrenzung noch ganz im Innern von $\mathfrak{H}$ liegt, weist erstens eine einseitige Nachbarschaft auf, die noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, und zweitens eine einseitige Nachbarschaft, die nicht in $\mathfrak{G}$ liegt.

Satz 3: Ist der beschränkte Bereich $\mathfrak{G}'$ ein Bild des Bereiches $\mathfrak{G}$, der auf seinem Rande ein glattes Stück $\mathfrak{k}$ einer Regelfläche besitzt, so liegt auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ ein analy-

tisches Flächenstück.

$P(w_o, z_o)$ sei ein Punkt auf $\mathfrak{R}$. In seiner Umgebung ist $\mathfrak{R}$ darstellbar durch

$$\psi(u,v,x,y) \equiv \varphi(w,z,\bar{w},\bar{z}) = 0.$$

P sei auf $\mathfrak{R}$ ferner so gewählt, dass ψ'_u in P nicht verschwindet. Die Gleichungen

$$\varphi(w,z,w^*,\bar{z}_o) = 0$$
$$\varphi(\bar{w}^*,z_o,w^*,\bar{z}_o) \equiv \psi^*(u^*,-v^*,x_o,y_o) = 0$$

ergeben in $\mathfrak{U}(P)$ nur Punkte, die auf $\mathfrak{R}$ liegen. Die letzte Gleichung ist nach u^* auflösbar.

$$u^* = \psi^*(v^*,x_o,y_o)$$
$$(5) \qquad \varphi(w,z,\psi^*(v^*,x_o y_o)+iv^*,\bar{z}_o) = 0$$

stellt in $\mathfrak{U}(P)$ eine glatte Hyperfläche dar und ist dort deshalb mit $\mathfrak{R}$ identisch. (5) lösen wir nach v^* auf, was in $\mathfrak{U}(P)$ sicher möglich ist, da $\varphi'_{\bar{w}}(w_o,z_o,\bar{w}_o,\bar{z}_o) \neq 0$.

$$v^* = \Phi(w,z); \quad \Phi'_w(w_o,z_o) \neq 0.$$

Die Transformation

$$\tilde{w} = \Phi(w,z), \quad \tilde{z} = z$$

bildet dann $\mathfrak{U}(P)$ ein-eindeutig auf einen Bereich $\tilde{\mathfrak{U}}$ ab, und dabei geht $\mathfrak{R}$ in $\tilde{\mathfrak{R}}$: $\tilde{w} = v^*$, d.h. $\tilde{v} = 0$ über. Der Durchschnitt $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{U}(P)$ und $\mathfrak{L}$ möge dabei auf $\tilde{\mathfrak{v}}$ abgebildet werden. In $\tilde{\mathfrak{v}}$ betrachten wir Folgen von Kreisen $|\tilde{z}-\tilde{z}_r| < \varrho$, $\tilde{w} = \tilde{w}_\nu$, $\lim(\tilde{w}_\nu,\tilde{z}_r) = (\tilde{w}_r,\tilde{z}_r)$ auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ in $\tilde{\mathfrak{U}}$. Da die Abbildung auf $\mathfrak{L}$ und dann auf $\mathfrak{L}'$ nicht ausgeartet ist, so müssen die $\mathfrak{L}'$-Bilder gewisser solcher Folgen von Kreisen (siehe Beweis von Satz 2) gegen eine analytische Fläche konvergieren, die auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ liegt.

Zusatz I: Ist die Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{L}'$ (siehe Satz 3) einschliesslich des Randes noch ein-eindeutig, so liegt auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ eine Regelfläche.

Jedes analytische Flächenstück auf $\mathfrak{R}$ geht auf Grund von Satz 1 wieder in ein analytisches Flächenstück über, also wegen der Ein-eindeutigkeit $\mathfrak{R}$ wieder in eine Regelfläche.

Zusatz II: Ist der Bildbereich $\mathfrak{L}'$ (siehe Satz 3) ein vollkommener Reinhardtscher Körper, ein vollkommener Kreiskörper $|z| = R(s)$, $s = \frac{w}{z}$, $R(s)$ stetig oder ein vollkommener Hartogssscher Körper $|z| = R(w)$, $R(w)$ stetig, so liegt auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ eine Regelfläche.

Nach Satz 3 liegt auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ ein analytisches Flächenstück. Bei den Automorphismen der Reinhardtschen Körper kann es nur in sich übergehen, wenn es auf den Achsen $w = 0$, oder $z = 0$ liegt. Das wiederum schliesst die Vollkommenheit aus. (Entsprechende Überlegungen gelten für Kreiskörper und Hartogssche Körper).

Hilfssatz 9: Der Bereich $\mathfrak{L}$ besitze auf seinem Rande ein glattes gewöhnliches Stück $\mathfrak{R}$ einer Regelfläche. Der Bildbereich $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$ werde von endlich vielen Hyperflächen begrenzt, die im einfach-zusammenhängenden Zylinderbereich $\mathfrak{z}$, der $\mathfrak{L}'$ ganz im Innern enthält,[1] glatt sind und nur gewöhnliche Punkte aufweisen. Dann liegen auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ unendlich viele verschiedene (d.h. nicht ineinander fortsetzbare) analytische Flächenstücke.

[1] $\mathfrak{L}'$ liegt ganz im Innern von $\mathfrak{z}$, wenn auch die Randpunkte von $\mathfrak{L}'$ noch innere Punkte von $\mathfrak{z}$ sind.

Liegt nämlich das analytische Flächenstück γ auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ und damit auf einer in $\mathfrak{z}$ glatten Hyperfläche, die keine Regelfläche ist, so lässt sich auf Grund von Hilfssatz 6 eine in $\mathfrak{z}$ analytische Funktion $\psi_\delta(w,z)$ finden, die in $\mathfrak{z}$ nur auf dem analytischen Flächenstück verschwindet, welches durch Fortsetzung aus γ hervorgeht.

Wäre nun der Hilfssatz 9 nicht richtig, so könnten wir zu den endlich vielen **verschiedenen** analytischen Flächenstücken, die auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ auftreten, die Funktionen $\psi_1(w,z), \ldots \psi_\rho(w,z)$ finden. Ferner sei $P(w_0,z_0)$ ein Punkt auf $\mathfrak{R}$. In seiner Umgebung ist $\mathfrak{R}$ darstellbar durch

$$\psi(u,v,x,y) \equiv \varphi(w,z,\bar{w},\bar{z}) = 0.$$

P sei so gewählt, dass ψ'_μ in P nicht verschwindet. Dann gibt es ein $\mathfrak{U}(P)$ und dazu eine Transformation S, die $\mathfrak{U}(P)$ ein-eindeutig so auf einen Bereich $\mathfrak{V}$ des $\tilde{w},\tilde{z}$ Raumes abbildet, dass dabei das Bild von $\mathfrak{R}$ die Hyperebene $\tilde{v} = 0$ wird. (Siehe Beweis von Satz 3). Der Durchschnitt $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{U}(P)$ und $\mathfrak{G}$ werde dabei auf $\tilde{\mathfrak{v}}$ abgebildet.

Ist T die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$, so bilden wir jetzt $T \cdot S^{-1} = T^*$: T^*: $w' = f(\tilde{w},\tilde{z})$; $z' = g(\tilde{w},\tilde{z})$: T^* bildet $\tilde{\mathfrak{v}}$ auf einen Teilbereich von $\mathfrak{G}'$ ab. Jede Folge $\tilde{P}_\nu$ von Punkten aus $\tilde{\mathfrak{v}}$, die gegen $\tilde{v} = 0$ konvergiert, weist nur Bilder auf, die sich auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ häufen. Wir bilden nunmehr in $\tilde{\mathfrak{v}}$:

$$H(\tilde{w},\tilde{z}) = f'_{\tilde{z}}(\tilde{w},\tilde{z}) \cdot \prod_{k=1}^{\rho} \psi_k(f(\tilde{w},\tilde{z}),g(\tilde{w},\tilde{z})),$$

$$K(\tilde{w},\tilde{z}) = g'_{\tilde{z}}(\tilde{w},\tilde{z}) \cdot \prod_{k=1}^{\rho} \psi_k(f(\tilde{w},\tilde{z}),g(\tilde{w},\tilde{z})).$$

Jeder der rechts auftretenden Faktoren ist in $\tilde{\mathfrak{v}}$ beschränkt.

Für die Faktoren $\chi_\kappa(w',z')$ folgt dies aus der Regularität im Erweiterungsbereich $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{F}'$. Ferner ist, falls $\mathfrak{U}(P)$ klein genug gewählt wird, T^* auf dem Rande von $\tilde{\mathfrak{V}}$ noch regulär, soweit der Rand nicht mit $\tilde{v} = 0$ zusammenfällt. Da $f'_{\tilde{z}}(\tilde{P}_\nu)$ und $g'_{\tilde{z}}(\tilde{P}_\nu)$ auf Grund des Zusatzes von Satz 1 beschränkt sind, wenn $\tilde{P}_\nu$ gegen $\tilde{v} = 0$ konvergiert, folgt, dass $f'_{\tilde{z}}(\tilde{w},\tilde{z})$ und $g'_{\tilde{z}}(\tilde{w},\tilde{z})$ in $\tilde{\mathfrak{V}}$ beschränkt sind. Also sind auch H und K in $\tilde{\mathfrak{V}}$ beschränkt.

Ist P_ν eine beliebige Folge aus $\tilde{\mathfrak{V}}$ mit $\lim P_\nu = R$ auf $\tilde{v} = 0$, so ist $\lim H(P_\nu) = \lim K(P_\nu) = 0$. Dies folgt aus Satz 1. Denn zu jeder Folge P_ν gibt es eine Teilfolge P_{ν_ℓ}, für die der Fall (A) oder (B) des Satzes 1 eintritt. Tritt der Fall (A) ein, so konvergieren die Bilder der P_{ν_ℓ} gegen einen Randpunkt auf $\mathfrak{F}'$, der auf einem analytischen Flächenstück $\chi_{P_1} = 0$ liegt, d.h. $\lim_{\ell\to\infty} \chi_{P_1}(f(P_{\nu_\ell}),g(P_{\nu_\ell})) = 0$. Tritt aber der Fall (B) ein, so ist $\lim f'_{\tilde{z}}(P_{\nu_\ell}) = \lim g'_{\tilde{z}}(P_{\nu_\ell}) = 0$. In jedem Falle ist

$$\lim H(P_{\nu_\ell}) = \lim K(P_{\nu_\ell}) = 0$$

für eine geeignete Teilfolge der P_ν. Folglich muss allgemein

$$\lim H(P_\nu) = \lim K(P_\nu) = 0 \text{ sein.}$$

Aus Hilfssatz 8 folgt jetzt

$$H(\tilde{w},\tilde{z}) \equiv 0, \quad K(\tilde{w},\tilde{z}) \equiv 0.$$

Es muss also

$$f'_{\tilde{z}}(\tilde{w},\tilde{z}) \equiv g'_{\tilde{z}}(\tilde{w},\tilde{z}) \equiv 0$$

oder mindestens für ein K_0

$\mathfrak{y}_{k_o}(f(\tilde{w},\tilde{z}),g(\tilde{w},\tilde{z})) \equiv 0$

sein. Beide Male müsste die Funktionaldeterminante identisch verschwinden. Das ist nicht möglich, da $\mathfrak{B}'$ als Bereich und nicht als niederdimensionale Mannigfaltigkeit vorausgesetzt war. Also kann es die Funktionen H und K nicht geben. Auf dem Rande von $\mathfrak{B}'$ gibt es unendlich viele, nicht ineinander fortsetzbare analytische Flächenstücke.

Satz 4: Der Bereich $\mathfrak{B}$ besitze auf seinem Rande ein glattes Stück $\mathfrak{R}$ einer Regelfläche. Der Bildbereich $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ werde von endlich vielen Hyperflächen begrenzt, die im einfach-zusammenhängenden Zylinderbereich $\mathfrak{z}$, der $\mathfrak{B}'$ ganz im Innern enthält, glatt und gewöhnlich sind. Dann ist mindestens eine der Randhyperflächen von $\mathfrak{B}'$ eine Regelfläche.

Auf Grund von Hilfssatz 9 liegen auf dem Rande von $\mathfrak{B}'$ unendlich viele verschiedene analytische Flächenstücke. Aus Hilfssatz 4 folgt, dass dann mindestens eine der Randhyperflächen eine Regelfläche ist.

Ist der Bereich $\mathfrak{B}'$ planar-konvex[1], so lässt sich der vorstehende Satz wesentlich verschärfen. Wir beweisen zunächst

Hilfssatz 10: Liegt das analytische Flächenstück $\mathfrak{f}$ auf dem glatten Randhyperflächenstück $\mathfrak{H}$ des planar-konvexen Bereiches $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{f}$ eine Ebene.

---

[1] Zum Begriff der Planar-Konvexität siehe H. Behnke und E. Peschl, Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und grossen. Math. Ann. 111, (1935)

Wir wählen zum Beweise auf γ einen Punkt $P(w_o, z_o)$, in dessen Umgebeung γ die Darstellung

(6) $z = g(w)$, $g(w)$ analytisch in $\mathfrak{U}(w_o)$ besitzt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $P(w_o, z_o)$ der Punkt (0,0) und $z = 0$ die analytische Tangente an $\mathfrak{H}$ in P ist. In der Darstellung $\Phi(w,z,\bar{w},\bar{z})=0$ von $\mathfrak{H}$ beginnt dann die linke Seite der Entwicklung nach den komplexen Veränderlichen:

$$\frac{z+\bar{z}}{2} + a \cdot w^2 + \bar{a} \cdot \bar{w}^2 + b \cdot w \cdot \bar{w}.$$ [1)]

Es folgen weitere Glieder, die entweder quadratisch sind und dann z oder $\bar{z}$ enthalten oder einen höheren Grad haben. Da $L(\Phi)$ in P verschwindet, folgt $b = 0$. Wegen der Planar-Konvexität ist $a = 0$.[2)]

Nun hat γ in $\mathfrak{U}(P)$ auf Grund von Hilfssatz 1 die Darstellung

$$\Phi^*(w,z) \equiv \Phi(w,z,0,0) = 0.$$

(6) darin eingestzt ergibt:

$$\Phi(w,g(w),0,0) \equiv 0$$

und deshalb

(7) $\Phi'_w + \Phi'_z g'(w) \equiv 0.$

Da $\Phi_w(0,0,0,0) = 0$, folgt $g'(0) = 0$.

Aus (7) schliessen wir weiter

$$\Phi''_{ww} + 2\Phi''_{wz} g' + \Phi''_{zz} g'^2 + \Phi'_z g'' \equiv 0.$$

Da $\Phi''_{ww}(0,0) = 0$, folgt $g''(0) = 0$. Durch die lineare Trans-

---

1) Siehe Behnke-Thullen, a.a.O. S. 28.

2) Siehe Behnke-Peschl, a.a.O. Seite 168/169.

formation, die $P(w_o,z_o)$ in den Nullpunkt, die Hypertangente in $x = 0$ und damit die analytische Tangente in $z = 0$ brachte, wurde jedoch $g''(w)$ nicht geändert. So folgt $g''(w)$ identisch Null. $\mathfrak{F}$ ist eine analytische Ebene.

Jetzt ergibt sich

Satz 5: Der Bereich $\mathfrak{G}$ besitze auf seinem Rande ein glattes Stück einer Regelfläche. Der planar-konvexe Bildbereich $\mathfrak{G}'$ werde von endlich vielen glatten Hyperflächenstücken begrenzt. Mindestens eines dieser Hyperflächenstücke ist dann eine Regelfläche.

Jedes auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ liegende analytische Flächenstück ist auf Grund von Hilfssatz 10 eine Ebene, lässt also eine Darstellung $\psi(w,z) = 0$ mit einer im ganzen endlichen Raume regulären Funktion ψ zu. Wie im Beweise des Hilfssatzes 9 folgt nun, dass auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ unendlich viele nicht ineinander fortsetzbare Stücke von analytischen Ebenen liegen. Auf mindestens einem glatten Hyperflächenstück $\mathfrak{H}$ liegen also unendlich viele analytische Ebenen, die sich im Punkte $P(w_o,z_o)$ häufen mögen. $\mathfrak{H}$ ist in P glatt, da es überall auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ glatt sein sollte; es lässt also in $\mathfrak{U}(P)$ eine Darstellung

$$\varphi(u,v,x,y) \equiv (u-u_o)^n + A_1(x,y,v)(u-u_o)^{n-1} + \ldots + A_n(x,y,v) = 0$$

mit der Spitze in (x_o,y_o,v_o) zu.[1] $L(\varphi) = 0$ ist wiederum glatt in $\mathfrak{U}(P)$. Die in $\mathfrak{U}(P)$ irreduziblen Faktoren von

---

[1] Siehe W.F.Osgood, a.a.O. S. 86 - 88.

$L(\varphi)$ seien $L_1(u,v,x,y)\ldots L_s(u,v,x,y)$. In den Punkten jeder analytischen Ebene auf $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{U}(P)$ verschwindet $L(\varphi)$ und damit einer der Faktoren $L_1\ldots L_s$. L_p, $p=1,\ldots s$ gestattet gleichfalls eine Darstellung (die nicht reell zu sein braucht):

$$L_p(u,v,x,y) = (u-u_o)^n + A_1^{(p)}(x,y,v)(u-u_o)^{n_p-1} + \ldots + A_{n_p}(x,y,v) = 0$$

Wegen der Irreduzibilität ist die Resultante von φ und L_p eine in $\mathfrak{U}(P)$ reguläre Funktion $R_p(x,y,v)$. Nur in den Punkten, die der Gleichung

$$R_p(x,y,v) = 0$$

genügen, können φ und L_p zugleich verschwinden. Bei mindestens einem P müsste dieses aber für unendlich viele lineare Systeme

$$v = \ell_p(x,y)$$

zutreffen. (Wir können uns u unter den vier Veränderlichen so ausgewählt denken, dass die analytischen Ebenen auf $\mathfrak{H}$ nicht ausschliesslich gegen z = const. konvergieren.) Daraus folgt $R_p \equiv 0$, was der Irreduzibilität von φ und L_p widerspricht, falls nicht $L_p \equiv \varphi$. In diesem Falle jedoch ist $\varphi = 0$ eine Regelfläche.

§ 4 Die Abbildung von Bereichen aufeinander, die von Regelflächen berandet werden

Durch die Existenz von Regelflächen auf dem Rande des Original- und des Bildbereiches werden in einem erheblichen Umfange die Abbildungsfunktionen festgelegt.

Darüber sagt aus

Satz 6: Der Bereich $\mathfrak{L}$ werde insbesondere von der glatten Regelfläche $\mathfrak{R}$ berandet. Der beschränkte Bildbereich $\mathfrak{L}'$ werde u.a. begrenzt von den Regelflächen $\mathfrak{R}_\nu$: $a_\nu(w',z') = \gamma_\nu(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\nu = 1,2,..,p$ und den endlich vielen analytischen Flächen $b_\mu(w',z') = 0$, $\mu = 1....s$. Die a_ν und b_μ seien im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{L}'$ regulär. Weitere analytische Flächen und Regelflächen möge es auf dem Rande von $\mathfrak{L}'$ nicht geben. Ist dann $\mathfrak{l}(w,z) = \gamma_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$ eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ in (einer genügend kleinen Umgebung) $\mathfrak{U}(P)$, $P(w_0,z_0)$ ein gewöhnlicher Punkt auf $\mathfrak{R}$, so gilt im Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{L}$ für ein gewisses ν_0:

$$a_{\nu_0}(w',z') \equiv F(\mathfrak{l}(w,z)).$$

Da P ein gewöhnlicher Punkt auf $\mathfrak{R}$ sein soll, so lässt $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{U}(P)$ eine Darstellung

$$\psi(u,v,x,y) \equiv \varphi(w,z,\bar{w},\bar{z}) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{w}} \neq 0 \quad \text{in P}$$

und damit auch die Darstellung

$$\bar{w} = \varphi^*(w,z,\bar{z})$$

zu. In P ist $\frac{\partial\varphi^*}{\partial\bar{w}} \neq 0$. Die analytischen Flächen

(8) $\bar{w}_1 = \varphi^*(w,z,\bar{z}_0)$,

wo $\bar{w}_1$ der Gleichung

(9) $\bar{w}_1 = \varphi^*(w_1,z_0,\bar{z}_0)$

genügt, liegen auf $\mathfrak{R}$ und bedecken in $\mathfrak{U}(P)$ ganz $\mathfrak{R}$. Um dies einzusehen, ist nur zu zeigen, dass die der Gleichung (9) genügenden $\bar{w}_1$ in der Nähe von w_0 eine reell analytische Kurve bilden. (9) ist gleichbedeutend mit

(10) $\Psi(u_1, v_1, x_o, y_o) = 0,$

wo x_o, y_o durch P fest gegeben sind. Die ersten Ableitungen der linken Seite von (10) nach u_1 und v_1 verschwinden nicht gleichzeitig in $u_1 + iv_1 = w_o$. Also können wir (8) auch schreiben

$$\bar{w}_1(t) = \varphi^*(w, z, \bar{z}_o), \quad A \leq t \leq B$$

mit $\bar{w}_1(t_o) = \bar{w}_o$ und $\frac{\partial \varphi^*}{\partial w} \neq 0$.

$\mathfrak{K}$ weist also in $\mathfrak{U}(P)$ eine Darstellung

$$\ell(w,z) = \gamma_o(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

mit $\frac{\partial \ell}{\partial w} \neq 0$ in P auf.

S sei die Transformation $\tilde{w} = \ell(w,z)$, $\tilde{z} = z$. Sie bildet $\mathfrak{U}(P)$ ein-eindeutig auf $\mathfrak{W}$ im $\tilde{w},\tilde{z}$-Raum ab und dabei den Durchschnitt $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}$ auf $\tilde{\mathfrak{v}}$. $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{U}$ wird ein-eindeutig auf die Regelfläche $\tilde{\mathfrak{K}}$: $\tilde{w} = \gamma_o(t)$ abgebildet. T sei die Transformation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$. Dann betrachten wir $T.S^{-1}$: $w' = f(\tilde{w},\tilde{z})$; $z' = g(\tilde{w},\tilde{z})$. Das ist eine in $\tilde{\mathfrak{v}}$ eindeutige Transformation. Nunmehr bilden wir die Funktion

$$H(\tilde{w},\tilde{z}) = \prod_{\mu=1}^{\rho} b_\mu(f(\tilde{w},\tilde{z}), g(\tilde{w},\tilde{z})) \prod_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left\{ a_\nu(f(\tilde{w},\tilde{z}), g(\tilde{w},\tilde{z})) \right\}.$$

Jeder der Faktoren ist in $\tilde{\mathfrak{v}}$ regulär und beschränkt. Für die Funktionen b_μ trifft dies zu, weil sie auf dem Rande von $\mathfrak{G}'$ noch regulär sind. Jeder Faktor des anderen Produktes lautet ausgeschrieben:

(11) $\frac{\partial a_\nu}{\partial w'} \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial a_\nu}{\partial z'} \frac{\partial g}{\partial \tilde{z}}$.

Da die a_ν im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{G}'$ regulär sind, sind $\frac{\partial a_\nu}{\partial w'}$ und $\frac{\partial a_\nu}{\partial z'}$ in $\mathfrak{G}'$ beschränkt als Funktionen von w', z'; sie sind ferner beschränkt in $\tilde{\mathfrak{v}}$ als Funktionen von $\tilde{w},\tilde{z}$, weil die Bildpunkte von $\tilde{\mathfrak{v}}$ in $\mathfrak{G}'$ liegen. $\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}}$ und $\frac{\partial g}{\partial \tilde{z}}$ sind beschränkt auf Grund des Zusatzes zu Satz 1. Also ist H in

$\tilde{\mathfrak{B}}$ beschränkt. Wir weisen jetzt nach: Für jede **Folge** $P_\mu(w_\mu, z_\mu)$ aus $\mathfrak{B}$, die gegen einen Punkt auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ konvergiert, gilt:

(12) $\lim H(P_\mu) = 0.$

Zum Beweise genügt es zu zeigen, dass jede solche Folge P_μ eine Teilfolge P_{μ_κ} enthält, für die

(13) $\lim_{\kappa\to\infty} H(P_{\mu_\kappa}) = 0$.

Wir benutzen jetzt Satz 1 und unterscheiden wie dort zwei Fälle.

1. Die Bilder der Kreise um die Punkte P_{μ_κ} auf den Ebenen $w = w_{\mu_\kappa}$ konvergieren gegen einen **einzigen** Punkt. Dann ist

$$\lim f'_{\tilde{z}}(P_{\mu_\kappa}) = \lim g'_{\tilde{z}}(P_{\mu_\kappa}) = 0$$

und damit (13) erfüllt.

2. Die Bilder der Kreise um die Punkte P_{μ_κ} auf den Ebenen $w = w_{\mu_\kappa}$ konvergieren gegen eine analytische Fläche f auf dem Rande von $\mathfrak{B}'$. f genügt entweder einer der Gleichungen $b_\mu(w', z') = 0$, also ist

$$\lim_{\kappa\to\infty} b_\mu(f(P_{\mu_\kappa}), g(P_{\mu_\kappa})) = 0$$

und damit wiederum (13) erfüllt, oder f liegt auf einer der $\mathfrak{B}'$ berandenden Regelflächen und genügt deshalb einer der Gleichungen

$$a_\nu(w', z') = \gamma_\nu(t) \quad \text{mit festem } t.$$

Ist $w'(u), z'(u)$ eine Parameterdarstellung eines Teiles von f, so ist

$$(14)\ \frac{\partial}{\partial u}\{a_\nu(w'(u), z'(u))\} = \frac{\partial a_\nu}{\partial w'}\frac{\partial w'}{\partial u} + \frac{\partial a_\nu}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u} = 0.$$

Wegen des Satzes 1 ist nun

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\{a_\nu(f(\tilde{w}, \tilde{z}), g(\tilde{w}, \tilde{z}))\}_{P_{\mu_\kappa}} = \lim_{\kappa\to\infty} \left\{\frac{\partial a_\nu}{\partial w'} f'_{\tilde{z}} + \frac{\partial a_\nu}{\partial z'} g'_{\tilde{z}}\right\}_{P_{\mu_\kappa}}$$

$= \frac{\partial a_\nu}{\partial w} f^1_{\tilde z}(P_0) + \frac{\partial a_\nu}{\partial \xi} g^1_{\tilde z}(P_0) = \frac{\partial}{\partial \tilde z}\{a_\nu(f(\tilde w_0,\tilde z),g(\tilde w_0,\tilde z))\}_{\tilde z_0} = 0.$

$(\lim P_{\mu_k} = P_0)$.

Die Symbole links in der vorletzten Zeile (und damit auch rechts) sind durch den Satz 1 erklärt. Die Veränderliche $\tilde z$ tritt als Parameter auf f auf. (Der Übergang von der Veränderlichen u des Satzes 1 zu $\tilde z$ ist elementar.) Also ist auch in diesem Falle (13) erfüllt. Damit ist auch (12) bewiesen. Aus Hilfssatz 8 folgt nun

$$H(\tilde w,\tilde z) \equiv 0.$$

Also verschwindet mindesten einer der Faktoren von H identisch. Aus

$$b_\mu(f(\tilde w,\tilde z),g(\tilde w,\tilde z)) \equiv 0$$

würde folgen, dass die Funktionaldeterminante von T identisch verschwände, T also ausgeartet wäre und damit ein Bereich $\mathfrak{G}'$ nicht als Bild von $\mathfrak{G}$ auftreten könnte. Folglich gilt für ein gewisses ν_0

$\frac{\partial}{\partial \tilde z}\{a_{\nu_0}(f(\tilde w,\tilde z),g(\tilde w,\tilde z)\} \equiv 0,$

$a_{\nu_0}(f(\tilde w,\tilde z),g(\tilde w,\tilde z)) \equiv F(\tilde w),$

$a_{\nu_0}(w'(w,z),z'(w,z) \equiv F(\ell(w,z)),$ w.z.b.w.

Zusatz 1: Ist die Regelfläche $\mathfrak{R}$, die den Bereich $\mathfrak{G}$ berandet, angebbar in der Form

$$\ell(w,z) = \gamma_0(t), \quad A \le t \le B,$$

wo $\ell(w,z)$ eine lineare Funktion der Veränderlichen ist, so gilt

$$a_{\nu_0}(w',z') \equiv F(\ell(w,z))$$

mit regulärer Funktion F in ganz $\mathfrak{G}$.

In diesem Falle bildet nämlich S den Bereich $\mathfrak{G}$ eineindeutig auf $\tilde\vartheta = \tilde{\mathfrak{G}}$ ab und $H(\tilde w,\tilde z)$ ist in ganz $\tilde{\mathfrak{G}}$ erklärt.

Zusatz 2: Ist Q irgend ein gewöhnlicher Punkt auf der Regelfläche $\mathfrak{R}$, soweit sie $\mathfrak{L}$ berandet $l^*(w,z) = \gamma_0^*(t)$, $0 \leq t \leq 1$ eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{U}(Q)$, so gilt in einer $\mathfrak{L}$ zugewandten einseitigen Nachbarschaft von $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{U}(Q)$ in bezug auf dasselbe (von Q unabhängige) ν

$$\frac{\partial(a_\nu(w'(w,z),z'(w,z)),l^*(w,z))}{\partial(w,z)} \equiv 0.$$

Zum Beweise verbinde man den Punkt P des Satzes 6 mit Q über lauter gewöhnliche Punkte auf $\mathfrak{R}$ durch eine Kurve C. Wir können C so durch die Punkte $P_1, \ldots, P_r$ unterteilen, dass die Umgebungen $\mathfrak{U}(P_i)$, in denen $\mathfrak{R}$ darstellbar ist durch

$$l_{P_i}(w,z) = \gamma^{(Pi)}(t)$$

mit nirgends zugleich verschwindenden ersten Ableitungen, C vollständig überdecken. Dort, wo aber $\mathfrak{U}(P_i)$ und $\mathfrak{U}(P_k)$ übereinandergreifen, gilt:

$$(15) \quad \frac{\partial(l_{P_i}(w,z), l_{P_k}(w,z))}{\partial(w,z)} \equiv 0;$$

denn auf jeder der auf $\mathfrak{R}$ liegenden analytischen Flächen muss die Determinante von

$$l_{P_1}(w,z) = \gamma^{(P_1)}(t_1)$$
$$l_{P_2}(w,z) = \gamma^{(P_2)}(t_2)$$

verschwinden. Da die linke Seite von (15) eine analytische Funktion ist, muss sie identisch verschwinden. In dem von $\mathfrak{U}(P_i)$ und $\mathfrak{U}(P_k)$ gleichzeitig überdeckten Bereich folgt aus

$$\frac{\partial(a_\nu, l_{P_1})}{\partial(w,z)} \equiv 0 \quad \text{unmittelbar} \quad \frac{\partial(a_\nu, l_{P_2})}{\partial(w,z)} \equiv 0.$$

So folgt schliesslich

$$\frac{\partial(a_{\nu_0}, \ell^*)}{\partial(w,z)} \equiv 0, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Zusatz 3: Gilt für die in Satz 6 auftretenden $\mathfrak{R}_\nu$:

$$\frac{\partial(a_{\nu_1}, a_{\nu_2})}{\partial(w,z)} \not\equiv 0 \quad \text{falls} \quad \nu_1 \neq \nu_2,$$

so gibt es zu jeder Regelfläche $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ nur ein ν_0, für das die Behauptung von Satz 6 gilt.

Würde es nämlich einen Punkt P auf $\mathfrak{R}$ geben, sodass in der einseitigen Umgebung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{U}(P)$ gilt

$$a_{\nu_1}(w',z') \equiv F(\ell_1(w,z))$$

und einen Punkt Q auf $\mathfrak{R}$, sodass in der einseitigen Umgebung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{U}(Q)$ gilt

$$a_{\nu_2}(w',z') \equiv F(\ell_2(w,z)),$$

so folgt auf Grund von Zusatz 2 in $\mathfrak{U}(Q)$

$$\frac{\partial(a_{\nu_1}, \ell_2)}{\partial(w,z)} \equiv 0$$

und damit

$$\frac{\partial(a_{\nu_1}, a_{\nu_2})}{\partial(w,z)} \equiv 0;$$

also wäre $\nu_1 = \nu_2$ entgegen der Voraussetzung.

Die Regelflächen $\mathfrak{R}_1$: $a_1(w,z) = \gamma_1(t)$ und $\mathfrak{R}_2$: $a_2(w,z) = \gamma_2(t)$ a_1 und a_2 regulär im von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ berandeten Bereich $\mathfrak{G}$, sollen fernerhin unabhängig voneinander heissen, wenn

$$\frac{\partial(a_1, a_2)}{\partial(w,z)} \not\equiv 0.$$

Satz 7: Der beschränkte Bereich $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{G}'$) werde u.a. berandet von den voneinander unabhängigen, glatten Regelflächen $\mathfrak{R}_\nu$: $e_\nu(w,z) = \delta_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots p$ (bzw. $\mathfrak{R}'_\nu$: $a_\nu(w',z') = \gamma_\nu($

$\nu = 1,..,p'$) und den endlich vielen analytischen Flächen $d_\mu(w,z) = 0$ (bzw. $b_\mu(w',z') = 0$). Die e_ν und d_μ seien im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ regulär (bzw. a_ν und b_μ im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}'$). Weitere analytische Flächen und Regelflächen möge es auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{B}'$) nicht geben. $\mathfrak{B}'$ sei ein ein-eindeutiges Bild von $\mathfrak{B}$. Dann gilt

1. $p = p'$.
2. Zu jedem $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ gibt es genau ein $\mathfrak{R}'_{\nu_2}$, sodass

$$\frac{\partial(a_{\nu_2}(w'(w,z),z'(w,z)),e_{\mu_1}(w,z))}{\partial(w,z)} \equiv 0.$$

3. Wenn die Folge P_μ aus $\mathfrak{B}$ gegen P_0, allein auf $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ gelegen, konvergiert, konvergieren die Folgen P'_μ der Bilder von P_μ nur gegen Punkte auf $\mathfrak{R}_{\nu_2}$.

Die erste und zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 6 und Zusatz 3. Zum Beweise von 3 greifen wir auf den Beweis von Satz 6 zurück. Im $\tilde{w},\tilde{z}$-Raume tritt als Bild von $e_\nu(w,z) = \delta_\nu(t)$ auf: $\tilde{w} = \delta_\nu(t)$. Die Bildpunkte $\tilde{P}_\mu$ der P_μ liegen auf Ebenen $\tilde{w} = \text{const}$, deren Bilder im w',z'-Raum gegen $a_\nu(w',z') = \text{const}$ streben. Diese analytischen Flächen liegen aber auf $\mathfrak{R}'_{\nu_2}$.

Aus Satz 6 folgt noch, dass in der $\mathfrak{B}$ zugewandten einseitigen Nachbarschaft eines genügend kleinen Stückes von $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ gilt:

$$(16) \qquad a_{\nu_2}(w'(w,z),z'(w,z)) \equiv F_{12}(e_{\nu_1}(w,z)).$$

Die Funktionen F, die jeweils zu verschiedenen genügend kleinen Stücken von $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ gehören, gehen offenbar alle durch

analytische Fortsetzung auseinander hervor. Ferner ist

(17) $F' = \frac{\partial a_{\nu_2}}{\partial w} : \frac{\partial e_{\nu_1}}{\partial w} = \frac{\partial a_{\nu_2}}{\partial z} : \frac{\partial e_{\nu_1}}{\partial z}$

F können wir vermittels (16) für alle Werte definieren, die e_{ν_1} in $\mathfrak{L}$ annimmt. Aus (17) folgt, dass $F(\zeta)$ überall regulär ist, wo nicht gleichzeitig $\frac{\partial e_{\nu_1}}{\partial w}$ und $\frac{\partial e_{\nu_1}}{\partial z}$ verschwinden. Aber auch in diesen höchstens eine analytische Fläche ausfüllenden Punkten muss $F(\zeta)$ regulär sein, weil es dort noch stetig ist. So folgt

Zusatz zu Satz 7: Zu jedem $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ gibt es genau ein $\mathfrak{R}'_{\nu_2}$, sodass

(18) $a_{\nu_2}(w'(w,z),z'(w,z)) \equiv F_{12}(e_{\nu_1}(w,z))$

in ganz $\mathfrak{L}$ mit "dort" regulärer Funktion F_{12}.

Wir untersuchen nun den Argumentbereich von F_{12}, um auf diese Weise Auskunft über das Verhalten der Abbildungsfunktionen am Rande zu bekommen.

Hierzu benötigen wir den Begriff der analytischen Projektion $\mathfrak{k}$ eines Bereiches $\mathfrak{L}$ auf die Mannigfaltigkeit $\tau = f(w,z)$; $f(w,z)$ eine beliebige in $\mathfrak{L}$ eindeutige und reguläre Funktion. Wir beziehen uns hierbei auf den in einer Arbeit von H. Behnke und E. Peschl eingeführten Begriff.[1] Diese analytische Projektion hat folgende hier benötigte Eigenschaften:

1. Jedem Punkte P(w,z) aus $\mathfrak{L}$ ist ein Punkt des Projektionsbereiches $\mathfrak{P}$ über der τ-Ebene mit der Koordinate $\tau = f(w,z)$ zugeordnet.

---

[1] H. Behnke u. E. Peschl, Offene Automorphismengruppen. Ersch. 1937.

2. Jedem Punkte Q(u) aus $\mathfrak{P}$ ist ein den Bereich $\mathfrak{G}$ schneidendes Flächenstück f(w,z) = u zugeordnet.

3. Jeder erreichbare Randpunkt von $\mathfrak{G}$ besitzt als Projektion einen erreichbaren Randpunkt oder inneren Punkt von $\mathfrak{P}$.

4. Ist F(f(w,z)) eindeutig und analytisch in $\mathfrak{G}$, so ist F(u) eindeutig und analytisch in $\mathfrak{P}$. Ist umgekehrt G(u) eindeutig und analytisch in $\mathfrak{P}$, so ist G(f(w,z)) eindeutig und analytisch in $\mathfrak{G}$.

5. Ist $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend, so ist es auch $\mathfrak{P}$. (Dagegen ist $\mathfrak{P}$ nicht notwendig wieder schlicht).

Diese Eigenschaften benutzen wir nun für die a_ν-Projektionen von $\mathfrak{G}'$ und die e_ν-Projektionen von $\mathfrak{G}$. Da unter den Voraussetzungen des Satzes 7 $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ und damit auch die Funktionen $a_{\nu_2}(w',z')$ und $e_{\nu_1}(w,z)$ gleichberechtigt sind, gilt mit (18) auch

$$e_{\nu_1}(w(w',z'),z(w',z')) \equiv F_{12}^{-1}(a_{\nu_2}(w',z'))$$

in ganz $\mathfrak{G}'$ mit "dort" regulärer Funktion F_{12}^{-1}. Der Argumentbereich von F_{12} - wenn w,z den Bereich $\mathfrak{G}$ durchläuft - ist $\mathfrak{P}_{\nu_1}$, die analytische Projektion von $\mathfrak{G}$ auf die Mannigfaltigkeit $\tau = e_{\nu_1}(w,z)$, und der Argumentbereich von F_{12}^{-1} ist $\mathfrak{O}_{\nu_2}$, die analytische Projektion von $\mathfrak{G}'$ auf die Mannigfaltigkeit $\tilde{\tau} = a_{\nu_2}(w',z')$. F_{12} bildet $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ ein-eindeutig und analytisch auf $\mathfrak{O}_{\nu_2}$ ab. Wird nun $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{G}'$) lediglich von glatten Hyperflächenstücken berandet, so ist $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ (bzw. $\mathfrak{O}_{\nu_2}$) ein nur von analytischen Kurven berandeter Bereich. Zeigen wir dies in bezug auf die a_{ν_2}-Projektion! Wir zerlegen den Rand von $\mathfrak{G}'$ in so viele Teile,

dass in den Punkten, die nur zu einem Randhyperflächenstück gehören, entweder $\frac{\partial a_{\nu_2}}{\partial w'}$ stets ungleich Null ist, oder das entsprechende für $\frac{\partial a_{\nu_2}}{\partial z'}$ zutrifft. Dies gelingt immer durch Zerlegung in endlich viele Teile, da die Punkte, in denen $\frac{\partial a_{\nu_2}}{\partial w'}$ und $\frac{\partial a_{\nu_2}}{\partial z'}$ zugleich verschwinden, isoliert liegen. Das einzelne Teilstück des Randes bilden wir dann (eventuell ausschliesslich seiner Begrenzung) durch

$w^* = a_{\nu_2}(w',z'); \quad z^* = w'$ (bzw. z')

ein-eindeutig auf eine glatte Hyperfläche

$\varphi^*(u^*,v^*,x^*,y^*) = 0$ ab. Diese trägt zur Begrenzung der w^*-Projektion bei lediglich durch ihre analytischen Tangenten $w^* = \text{const.}$. Also höchstens die Projektion derjenigen Punkte P von $\varphi^* = 0$ trägt zur Berandung des Projektionsbereiches bei, bei denen für P die Gleichungen

$$\varphi^* = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} = 0 \tag{19}$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen stellen im allgemeinen analytische Kurvenstücke dar, deren w^*-Projektion also wieder ein analytisches Kurvenstück oder ein Punkt ist. Ist die Mannigfaltigkeit (19) dagegen ein zweidimensionaler Bereich (mehr Dimensionen kann er nicht aufweisen), so liegen auf dem Rande seiner w^*-Projektion zugleich die Projektionen anderer Teilstücke des Randes. So folgt also, dass die a_{ν_2} Projektion von $\mathfrak{H}'$ ein nur von analytischen Kurven berandeter Bereich ist. Daraus folgt: Bei der Abbildung von $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ auf $\mathfrak{P}_{\nu_2}$ ist die Abbildungsfunktion F_{12} auf dem

Rande noch überall stetig und die Ränder von $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ und $\mathfrak{Q}_{\nu_2}$ werden noch ein-eindeutig aufeinander bezogen. F_{12} ist auf dem Rande von $\mathfrak{P}_{\nu_1}$ mit Ausnahme isolierter Punkte noch analytisch. (Entsprechend F_{12}^{-1} auf dem Rande von $\mathfrak{Q}_{\nu_2}$). Nunmehr lösen wir ein System

$$a_{\nu_2}(w',z') \equiv F_{12}(e_{\nu_1}(w,z))$$
$$a_{\nu_4}(w',z') \equiv F_{34}(e_{\nu_3}(w,z))$$

nach w' und z' auf. Das ist immer im kleinen möglich für $\nu_2 \neq \nu_4$, da dann sicher die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(a_{\nu_2}, a_{\nu_4})}{\partial(w',z')} \neq 0.$$

So folgt

$$(20) \qquad \begin{aligned} w' &= H_1(F_{12}(e_{\nu_1}(w,z), F_{34}(e_{\nu_3}(w,z)))), \\ z' &= H_2(F_{12}(e_{\nu_1}(w,z), F_{34}(e_{\nu_3}(w,z)))). \end{aligned}$$

Für (w,z) aus $\mathfrak{L}$ müssen die Gleichungen (20) identisch sein mit den Transformationsformeln

$$w' = h(w,z) \; ; \quad z' = k(w,z)$$

der Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{L}'$. H_1 und H_2 sind also in ihrem Argumentbereich nicht nur regulär sondern auch eindeutig. Ist

$$\frac{\partial(a_{\nu_2}, a_{\nu_4})}{\partial(w',z')} \neq 0$$

auf dem Rande von $\mathfrak{L}$ (und weil wir es nur noch mit beschränkten Bereichen zu tun haben, auch im Innern von $\mathfrak{L}$), so sind $H_1(W,Z)$ und $H_2(W,Z)$ noch regulär für diejenigen (W,Z), die zu (w,z) auf dem Rande von $\mathfrak{L}$ gehören. Also sind h(w,z) und k(w,z) auf dem Rande von $\mathfrak{L}$ noch überall stetig, ferner regulär mit Ausnahme höchstens auf endlich

vielen analytischen Flächen $e_{\nu_1}(w,z) = \text{const.}$ und $e_{\nu_3}(w,z) = \text{const.}$.

Wir führen noch den Begriff des Normalbereiches ein. $\mathfrak{L}$ heisst ein Normalbereich, wenn

1. $\mathfrak{L}$ beschränkt ist;
2. $\mathfrak{L}$ nur von endlich vielen glatten Hyperflächenstücken $\mathfrak{H}$ berandet wird;
3. die zu den $\mathfrak{H}$ gehörigen Regelflächen alle in der Form $a_\nu(w,z) = \gamma_\nu(t)$, $A \leq t \leq B$, $\gamma_\nu(t)$ stetig darstellbar sind, wo $a_\nu(w,z)$ in $\mathfrak{L}$ (einschliesslich des Randes) regulär ist;
4. für $\nu \neq \mu$ gilt

$$\frac{\partial(a_\nu, a_\mu)}{\partial(w,z)} \neq 0 \quad \text{in } \mathfrak{L} \text{ (einschl. Rand)};$$

5. die auf den übrigen Hyperflächen $\mathfrak{H}$ noch auftretenden endlich vielen analytischen Flächen sich in der Form $d(w,z) = 0$ darstellen lassen, wo $d(w,z)$ regulär im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{L}$ ist.

Wir haben nun bewiesen:

Satz 8: Wird der Normalbereich $\mathfrak{L}$ ein-eindeutig auf den Normalbereich $\mathfrak{L}'$ abgebildet und ist die Anzahl der berandenden Regelflächen mindestens zwei (nach Satz 7 ist deren Anzahl auf $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ gleich gross), so sind die Abbildungsfunktionen überall auf dem Rande noch stetig. Sie sind sogar noch analytisch mit Ausnahme höchstens auf endlich vielen analytischen Flächen.

§ 5. Automorphismen und starre Bereiche.

Es ist nun leicht aus den Sätzen 7 und 8 zu ersehen, welchen einschränkenden Bedingungen die Automorphismen von Normalbereichen unterworfen sind.

Satz 9: Wird der Normalbereich $\mathfrak{B}$ insbesondere berandet von den Regelflächen $a_\nu(w,z) = \gamma_\nu(t)$, $\nu = 1,..,p$; $p \geq 2$, so sind die Abbildungsfunktionen der Automorphismen von $\mathfrak{B}$ überall auf dem Rande noch stetig und sogar noch analytisch mit Ausnahme auf endlich vielen analytischen Flächen. Jeder Regelfläche R_ν ist genau eine Regelfläche R_μ zugeordnet, sodass

$$a_\mu(w'(w,z),z'(w,z)) \equiv F_{\nu\mu}(a_\nu(w,z))$$

in ganz $\mathfrak{B}$ mit "dort" regulärer Funktion $F_{\nu\mu}$.

Der erste Teil des Satzes ist ein Sonderfall von Satz 8, der zweite Teil ergibt sich aus dem Zusatz zu Satz 7.

Da der Dizylinder ein Normalbereich mit den beiden Regelflächen $w = e^{it}$ und $z = e^{it}$ ist, folgt aus Satz 9 unmittelbar die bekannte Aussage: Jeder Automorphismus eines Dizylinders ist entweder

$$(21) \qquad w' = f(w), \quad z' = g(z) \qquad \text{oder}$$
$$w' = f(z), \quad z' = g(w),$$

wo die rechts auftretenden Funktionen eine ein eindeutige Abbildung des Einheitskreises vermitteln.

Aus Satz 6 schliessen wir noch direkt

Satz 10: $\mathfrak{B}$ sei ein beschränkter Zylinderbereich (also das topologische Produkt eines Bereiches $\mathfrak{B}^{(w)}$ der w-Ebene und eines Bereiches $\mathfrak{B}^{(z)}$ der z-Ebene). $\mathfrak{B}^{(w)}$ werde berandet von endlich vielen glatten Kurven $\varphi_i(x,y) = 0$. Entspre-

chendes gelte für $\mathfrak{L}^{(2)}$. Dann ist jeder Automorphismus von $\mathfrak{L}$ von der Form (21).[1)]

Diese Aussage ist enger als der Satz von Henri Cartan. Um Satz 6 anwenden zu können, wird vorausgesetzt, dass $\mathfrak{L}^{(1)}$ und $\mathfrak{L}^{(2)}$ von glatten Kurvenstücken berandet werden. Der Beweis des Satzes 6 zeigt aber, dass die Cartansche Aussage auf dieselbe Weise wie dieser Satz nachzuweisen ist.

Es ist nun leicht, mit Hilfe von Satz 9 starre Bereiche zu konstruieren.

Satz 11: Auf dem Rande des Normalbereiches $\mathfrak{L}$ mögen die folgenden drei und keine weiteren Regelflächen liegen:

1. $w = \gamma_1(t)$; 2. $z = \gamma_2(t)$;

3. $\alpha w + \beta z = \gamma_3(t)$, $\alpha\beta \neq 0$.

Sind dann die w- und z-Projektionen von $\mathfrak{L}$ keine Kreise, so lässt $\mathfrak{L}$ höchstens endlich viele Automorphismen zu.

Aus Satz 9 folgt, dass bei einem Automorphismus entweder

$$\text{I} \qquad \begin{aligned} w' &= F(w); \\ z' &= G(\alpha w+\beta z); \quad F,G,H \text{ regulär für } (w,z) \text{ aus } \mathfrak{L} \\ \alpha w'+\beta z' &= H(z) \end{aligned}$$

oder das entsprechende nach Vertauschung von w und z bzw. w' und z' gilt, oder schliesslich

$$\text{II} \qquad \begin{aligned} w' &= F(w); \\ z' &= G(z); \end{aligned} \qquad \alpha w'+\beta z' = H(\alpha w+\beta z)$$

[1)] Siehe auch H. Cartan, Sur les fonctions de n variables complexes: les transformation du produit topologique de deux domaines bornés. Bull.Soc.math.France,64 (1936) Ebenso folgt das Theorem II dieser Arbeit aus Satz 6.

(einschliesslich der Vertauschungsmöglichkeiten) ist. Zunächst der Fall II. Durch Einsetzen und Differentiieren folgt:

$$\beta G'(z) = \beta H'(\alpha w+\beta z),$$
$$\alpha F'(w) = \alpha H'(\alpha w+\beta z);$$

also $F' = G' = H' = \text{const.} = c.$

Daraus folgt: $w' = c \cdot w + \gamma_1, \quad z' = c \cdot z + \gamma_2.$

Da hierdurch die w- bzw. z-Projektion in sich übergeführt wird und diese kein Kreis ist, können nur endlich viele Transformationen II vorkommen.

In dem durch Vertauschung entstehenden Fall

$$w' = G(z)$$
$$z' = F(w)$$
$$\alpha w' + \beta z' = H(\alpha w+\beta z)$$

folgt genau so:

$$w' = \frac{\beta}{\alpha} \cdot c \cdot z + \gamma_1,$$
$$z' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot c \cdot w + \gamma_2.$$

Ebenso folgt für I die Linearität der Funktionen F,G,H. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Bei der Konstruktion starrer Bereiche haben wir nur dafür zu sorgen, dass die nach dem obigen Satze noch möglichen Automorphismen ausgeschlossen werden. Richten wir es so ein, dass die $(\alpha w + \beta z)$-Projektion nicht durch eine Drehstreckung in die w- oder z-Projektion übergeführt werden kann, so fallen die Automorphismen I bereits fort. Die Automorphismen des zweiten Unterfalles von II lassen sich gleichfalls leicht durch passende Wahl von $\frac{\alpha}{\beta}$ ausschalten. Übrig bleibt noch der erste Unterfall von II,

bei dem alle drei Projektionen in sich übergeführt werden. Offenbar werden dabei alle drei Projektionen um denselben Winkel gedreht. Ist nun die $(\alpha w+\beta z)$-Projektion so gewählt, dass sie nicht dieselben Drehungen zulässt wie die w- und z-Projektion, so ist der Bereich völlig starr.

Der Bereich $\mathfrak{L}$:

$$0 < R(w), I(w) < 2;$$

$$0 < R(z), I(z) < 1;$$

$R\left\{ w + (1 - \frac{\varepsilon i}{2}) \cdot z - (3-\varepsilon) \right\} < 0$, $\varepsilon > 0$, aber genügend klein, ist völlig starr.

Die w-,z-Projektionen von $\mathfrak{L}$ sind Quadrate, die $(w + (1-\frac{\varepsilon i}{2})z)$-Projektion dagegen nicht. Das $\frac{\varepsilon}{\delta}$ liegt in der Nähe von 1. Weiter lässt die $\left\{ w + (1-\frac{\varepsilon i}{2})z \right\}$-Projektion keine der Drehungen um $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ zu.

Literaturverzeichnis.

H. Behnke u. P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg.d.Math.u.i.Grenzgeb. III,3 (1934).

H. Behnke u.E.Peschl, Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und grossen. Math.Ann.111,(1935).

H. Behnke u.E.Peschl, Offene Automorphismengruppen, Erscheint 1937.

C. Carathéodory, Conformal Representation, Cambridge Tracts, 28 (1932).

E. Cartan, Sur la géometrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables komplexes, Annali di mat. pura ed appl. IV,11 (1933).

H. Cartan, Sur les fonctions de n variables komplexes: les transformations du produit topologique de deux domaines bornés. Bull.Soc.math.France 64,(1936).

A. Hurwitz u. R. Courant, Vorlesungen über allg. Funktionentheorie u. ellipt. Funktionen, Springer (1929).

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, Teubner, (1929).

Lebenslauf.

Am 11. Oktober 1910 wurde ich, Wolfgang Rothstein, evangelischer Konfession, als Sohn des Ministerialdirigenten Dr. Gustav Rothstein und seiner Ehefrau Sophie geb. Müller in Minden i. W. geboren. Von Ostern 1920 bis Sommer 1922 besuchte ich das staatliche Gymnasium zu Minden i. W., darauf bis Ostern 1929 das staatliche Schillergymnasium zu Münster i. W. Nach bestandener Reifeprüfung studierte ich an den Universitäten Münster (S.-S. 1929 bis W.-S. 1930/31 und W.-S 1931/32 bis S.-S. 1933) und München (S.-S. 1931) Mathematik, Physik und Philosophie. Ich nahm an dem Mathematischen Seminar von Herrn Professor Dr. Behnke teil, dem ich für meine wissenschaftliche Ausbildung und die Anregung zu dieser Arbeit zu danken habe. Meine Hauptlehrer in den anderen Fächern waren: Herr Prof. Dr. Kratzer in Physik; Herr Prof. D. Dr. Scholz in Philosophie.